Литература

Базовая:

- Зорич В. А., Математический анализ, Том II.
- Арнольд В. И., Математические методы классической механики.
- W. Rudin, Principles of mathematical analysis

Продвинутая:

- С. П. Новиков, И. А. Тайманов, Современные геометрические структуры и поля.
- Картан А., Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.
- H. Flanders, Differential forms and applications to the physical sciences
- M. Spivak, Calculus on manifolds
- Bishop, R.; Goldberg, S. I. (1980), Tensor analysis on manifolds

Множество G с заданной на нем бинарной операцией $*: G \times G \to G$ называется *группой* $(G, *)$ если:

1. $\forall a, b, c \in G : a * (b * c) = (a * b) * c$
2. $\exists e \in G : \forall a \in G, a * e = e * a = a$
3. $\forall a \in G, \exists b \in G : a * b = e$

Листок - 1

1. Докажите, что матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $a, b \in \mathbb{R}$ образуют группу относительно стандартного умножения матриц ($c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$).
2. Докажите, что множество векторов ВП образуют группу относительно сложения.
3. Докажите, что определитель кососимметричной матрицы нечетного размера равен нулю.
4. Пусть $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix}$ $A, X, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Докажите, что $\det \mathrm{C} = \det A \det B$
5. Докажите, что $\det \mathrm{adj} A = (\det A)^{n-1}$ [adj - присоединенная матрица]
6. Вычислите $\det A$, если

   a) $a_{ij} = \min(i, j)$

   b) $a_{ij} = \max(i, j)$
7. Вычислите $\begin{vmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 & -1 \\ 0 & & & -1 & 1 \end{vmatrix}$
8. Вычислите $\partial_{ij} \det A$

1 Некоторые напоминания о декартовой системе

Пусть $\{e_i\}$ - базис. Здесь и далее $(\cdot,\cdot),[\cdot,\cdot]$ - скалярное и векторное произведение соответственно, по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

$$[e_i, e_j] = \epsilon_{ijk} e_k$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

$$V = e_i V^i_{(e_i)}$$

Индексная нотация может быть удобна, в частности, для доказательства некоторых утверждений векторного анализа:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]] &= [e_i,[e_l,e_m]]A^iB^lC^m \\
&= [e_i,e_k]\epsilon_{klm}A^iB^lC^m \\
&= e_j\epsilon_{jik}\epsilon_{klm}A^iB^lC^m \\
&= e_j(\delta_{jl}\delta_{im} - \delta_{jm}\delta_{il})A^iB^lC^m \\
&= \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})
\end{aligned}$$

2 Криволинейные координаты

Пусть заданы отображения: $x = x(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$,$y = y(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$,$z = z(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$. В каждой точке пространства тогда определены вектора:

$$\mathbf{i}_i = \frac{\partial}{\partial\zeta^i} = \mathbf{e_a}\frac{\partial x^a}{\partial\zeta^i}.$$

Точнее в каждой точке p пространства M (которое мы должны, вообще говоря, считать дифференциальным многообразием) определенно соответствующее векторное пространство $\mathbf{T_pM}$, называемое касательным пространством. Вектора $\mathbf{i}_i(\zeta)$ образуют базис этого пространства в данной точке p (которая задается локальными координатами ζ).Вообще говоря, вектора $\mathbf{i}_i$ различны в каждых точках пространства и не обязаны иметь единичную длину или свойство ортогональности. Обозначим скалярное произведение таких векторов:

$$g_{ij} = (\mathbf{i}_i, \mathbf{i}_j)$$

Def 1. *Тензор g_{ij} называется метрическим тензором.*

Разложим аналогично с декартовой системой произвольные вектора $\mathbf{V},\mathbf{W}$ по базису $\mathbf{i}$. Для скалярного произведения получим:

$$(\mathbf{V},\mathbf{W}) = (\mathbf{i}_i,\mathbf{i}_k)V^iW^k = g_{ik}V^iW^k = V_iW^i,$$

где в последнем равенстве мы определили *ковариантные* компоненты $V_i = g_{ij}V^j$ вектора $\mathbf{V}$ (V^k называются *контравариантными* компонентами). Такое определение согласуется с известным вам определением ковариантных и контравариантных компонент из курса линейной алгебры. Проводя дальнейшую аналогию, ковариантные компоненты V_k мы можем рассматривать как компоненты некоторой линейной формы (линейного функционала).

Действие такой 1-формы на произвольной вектор (присоединенный к той же точке) представляет собой скалярное произведение:

$$V(\cdot) = (\mathbf{V}, \cdot)$$

Все линейные формы присоединенные к точке ζ^i образуют векторное пространство (двойственное к пространству векторов).

В дальнейшем мы будем фокусироваться на системах криволинейных координат где метрический тензор имеет простой (диагональный) вид:

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = h_i^2 \delta_{ij}$$

Коэффициенты h_i, нормы базисных векторов, носят название коэффициентов Ламе. В таких системах можно ввести ортонормированный базис[1].:

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{i}_i}{(\mathbf{i}_i, \mathbf{i}_i)}$$

В таком базисе скалярное произведение выглядит особенно просто:

$$(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = \bar{V}^k \bar{W}^k = \bar{V}_k \bar{W}^k,$$

где $\bar{x}^k$ - разложения векторов по ортонормированному базису. Это обозначение мы будем также использовать и далее.

Рассмотрим некоторую функцию S, определенную в каждой точке нашего пространства(на нашем многообразии). В каждой точке полный дифференциал имеет вид:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \zeta^i} d\zeta^i$$

и является линейной формой, а точнее, дифференциальной 1-формой. Как и для всякой линейной формы(линейного функционала) аргументом выступает элементы ВП, а областью определения - поле скаляров этого векторного пространства. Дифференциалы $d\zeta^i$ образуют базис на пространстве 1-форм, действие форм на любой вектор определяется соотношением на базисных векторах:

$$d\zeta^k(\mathbf{i}_j) = \delta_j^k$$

и линейностью для продолжения. Частные производные $\partial_{\zeta^i} S$ являются компонентами 1-формы dS в естественном базисе $d\zeta^i$.

На векторе $\delta\zeta = i_k \delta\zeta^k$ - малом смещении $\delta\zeta^i$ полный дифференциал действует следующим образом:

$$dS(\delta\zeta) = \frac{\partial S}{\partial \zeta^i} d\zeta^i(i_k \delta\zeta^k) = \frac{\partial S}{\partial \zeta^i} \delta\zeta^i \approx S(\zeta + \delta\zeta) - S(\zeta)$$

Т.е. $dS(\delta\zeta)$ и есть dS в привычном понимании.

В системах с диагональным метрическим тензорам можно ввести другой базис 1-форм, определив его действием на единичные базисные вектора:

$$f^k(\mathbf{e_j}) = \delta_j^k$$

Откуда в силу линейности:

$$f^k = h_k d\zeta^k$$

[1]**Важно**: зависимость векторов e_i от точки пространства не исчезает

Действие линейной формы $\hat{w} = w_k d\zeta^k$ в точке ζ на вектор $\mathbf{V}$, присоединенный к той же точке ζ, задается следующим образом:

$$\hat{w}(\mathbf{V}) = w_k d\zeta^k(\mathbf{i}_j V^j) = w_k V^k = h_k \bar{w}_k h_k^{-1} \bar{V}^k = \bar{w}_k \bar{V}^k$$

Это показывает что компоненты 1-формы таким образом можно рассматривать как ковариантные компоненты некоторого вектора, а действие формы задавать через скалярное произведение с этим вектором $\mathbf{i}_i w^i = \mathbf{e_i} \hat{w}^i$.

Def 2. *Градиентом функции*

S будем называть полный дифференциал dS отнесенный к базису f^k:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \zeta^k} d\zeta^k = (\frac{1}{h_k}\frac{\partial S}{\partial \zeta^k}) f^k = \overline{\nabla S}_k f^k$$

Градиент функции S, или другими словами полная производная S, это линейный функционал векторов касательного пространства $T_p M$ в $\mathbb{R}$:

$$dS(V) = V^l \frac{\partial S}{\partial \zeta^k} d\zeta^k(\mathbf{i}_l) = V^k \frac{\partial S}{\partial \zeta^k}$$

Def 3. *Внешней алгеброй ВП*

V называется алгебра порожденная элементами $\{1, e_i\}$, со следующими определяющими соотношениями:

- $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$
- $e_i \wedge 1 = e_i$

Def 4. *Дифференциальной k-формой*

на $\mathbb{R}^n$ будем называть объекты вида:

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} f_{i_1, i_2, \dots, i_k}(x^1, \dots) dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \qquad (1)$$

где f - гладкие функции, dx^i - дифференциалы координаты x^i. При смене базиса это представление меняет форму.

Def 5. *Внешней производной*

для формы[2]

$$\phi = g dx^I$$

называется форма:

$$d\phi = \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I$$

.

Оператор Ходжа $*$ переводит формы ранга k в формы ранга $n-k$. Сначала определим действие на произвольном внешнем произведении базисных форм:

$$*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \frac{\sqrt{g}}{(n-k)!} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \epsilon_{j_1 \dots j_n} dx^{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_n}$$

[2]Здесь I - мультииндекс, и под dx^I поднимается внешнее произведение всех дифференциалов

Теперь пусть α - произвольная форма, раскладывая её в нашем базисе (упраженение - покажите что эта форма записи согласуется с определением (1)):

$$\alpha = \frac{1}{k!}\alpha_{i_1,\dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

и обозначив[3]:

$$\beta_{i_{k+1}\dots i_n} = \frac{\sqrt{g}}{k!}\alpha^{i_1\dots i_k}\epsilon_{i_1\dots i_n}$$

определим оператор следующим образом:

$$(*\alpha) = \frac{1}{(n-k)!}\beta dx^{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$$

Займемся теперь определением дивергенции векторного поля $\mathbf{V} = i_k V^k$. Рассмотрим 1-форму V, соответствующую векторному полю$\mathbf{V}$:

$$V = V_i d\zeta^i = g_{ik} V^k d\zeta^i,$$

применим к ней оператор Ходжа:

$$*V = \frac{1}{2}\sqrt{g}\epsilon_{ijk} V^k d\zeta^i \wedge d\zeta^j,$$

где $g = det(g_{ij})$ и возьмем внешнюю производную от получившейся 2-формы:

$$d(*V) = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial\zeta^l}\left(V^k\sqrt{g}\right) d\zeta^l \wedge d\zeta^i \wedge d\zeta^j$$

Отметив, что:

$$d\zeta^l \wedge d\zeta^i \wedge d\zeta^j = \epsilon_{lij} d\zeta^1 \wedge d\zeta^2 \wedge d\zeta^3,$$

получим:

$$d(*V) = \frac{\partial}{\partial\zeta^l}\left(V^k\sqrt{g}\right) d\zeta^1 \wedge d\zeta^2 \wedge d\zeta^3$$

Полученная 3-форма $d(*V)$,отнесенная к канонической форме объема $f^1 \wedge f^2 \wedge f^3$ является *дивергенцией векторного поля* V:

$$\mathbf{divV} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\partial_{\zeta^k}(h_1 h_2 h_3 \frac{\hat{V}^k}{h_k})$$

Поменяв порядок операций, построим циркуляцию векторного поля. Сначала возьмем внешнюю производную:

$$dV = \frac{\partial}{\partial\zeta^k}\left(g_{ij}V^j\right) d\zeta^k \wedge d\zeta^i,$$

и к полученной 2-форме применим оператор Ходжа:

$$*(dV) = \sqrt{g} g^{kl} g^{im}\frac{\partial}{\partial\zeta^k}(g_{ij}V^j)\epsilon_{lmn} d\zeta^n$$

[3]Важно: индексы подняты

В системах Ламе, компоненты полученной 1-формы в базисе f^i совпадают с обычным определением циркуляции:

$$*(dV) = h_1 h_2 h_3 h_k^{-2} h_i^{-2} \epsilon_{kin} \frac{\partial}{\partial \zeta^k} (h_i V^i) h_n^{-1} f^n = [\nabla, \mathbf{V}] f^n$$

После упрощения:

$$[\nabla, \mathbf{V}] = \frac{h_n}{h_1 h_2 h_3} \epsilon_{kin} \partial_{\zeta^k} (h_k \hat{V}^k)$$

.

Ex 1. *Рассмотрим сферическую систему координат* (r, θ, ϕ)*, введенную обычным образом:*

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

Построим базисные вектора:

$$\mathbf{i}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \mathbf{i}_\theta = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}, \mathbf{i}_\phi = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix};$$

и вычислим по ним коэффиценты Ламе. $h_r = 1 . h_\theta = r, h_\phi = r \sin\theta$. Каноническая форма объема тогда примет следующий вид:

$$f^r \wedge f^\theta \wedge f^\phi = r^2 \sin\theta dr \wedge d\theta \wedge d\phi$$

.

Листок - 2

1. Найдите значения ω на указанных векторах:
   (a) $\omega = x^2 dx^1$ на векторе $\zeta = (1, 2, 3)$
   (b) $\omega = dx^1 \wedge dx^3 + dx^1 \wedge dx^2$ на паре векторов ζ_1, ζ_2
2. Образуют ли формы ранга k векторное пространство? Какой размерности?
3. Пользуясь определением $\wedge$ покажите, что для форм ω, η рангов k, l верно $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$
4. Любая ли 1-форма является дифференциалом?
5. Как преобразуются координаты 1-форм при гладких замене координат?
6. Покажите что для внешнего произведения $\omega^k \wedge \omega^k = 0$ при $k = 1$. Верно ли это для $k > 1$?
7. Вычислите коэффициенты Ламе для параболической системы координат. Выпишите в явном виде операторы дивергенции, ротора, градиента
8. Вычислите коэффициенты Ламе для цилиндрической системы координат. Выпишите в явном виде операторы дивергенции, ротора, градиента.
9. Под оператором Лапласа $d(*dS)$ понимаем дивергенцию градиента. Получите общий вид в системах Ламе, предъявите явную запись оператора в сферических координатах.

Задача 9 - обязательная. Листочек считается сданным если сдано 5 задач из 8 и 9 задача в срок до 1 ноября 2018

3 Напоминания из прошлой лекции

Ex 2. *Внешнее произведение форм* $\omega = x^2 dx^1 \wedge dx^3 + dx^2 \wedge dx^4$ *и* $\eta = (x^1+1)dx^2 \wedge dx^4$

$$\omega \wedge \eta = x^2(x^1+1)dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^4 + (x^1+1)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^2 \wedge dx^4 = \\ = -x^2(x^1+1)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$$

Ex 3. *Внешний дифференциал формы* $\omega = (x^1 + x^3 x^3)dx^1 \wedge dx^2$*:*

$$d\omega = dx^1 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + 2x^3 dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = 2x^3 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

4 Интегрирование форм

Параметризуем $k-$многообразие $\Omega_k \subset R^d$ с помощью $\tau^1, \dots, t^k$:

$$\xi^1 = \xi^1(\tau^1, \dots, \tau^k) \tag{2}$$
$$\dots \tag{3}$$
$$\xi^d = \xi^d(\tau^1, \dots, \tau^k) \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

Для Ω_k при такой параметризации существует касательное пространство со следующим базисом:

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{i}_1 \frac{\partial \xi^1}{\partial \tau^i} + \dots + \mathbf{i}_d \frac{\partial \xi^d}{\partial \tau^i}$$

Вектор $\mathbf{t}_i$ - касательный к кривой на Ω_k, полученный варьированием одного параметра τ_i при фиксированных остальных. Выбор порядка векторов определяет относительную(по отношению к исходному многообразию) ориентацию.

Def 6.

$$\int_{\Omega_k} {}^{(k)}\omega = \int d\tau^1 \cdots \int d\tau^k \omega(\mathbf{t}_1, \dots \mathbf{t}_k) \tag{6}$$

Левый верхний индекс означает здесь и далее явно указывает что это k-форма.

Ex 4. *Рассмотрим 1-мерное многообразие* M *вложенное в* $\mathbb{R}^3$*, параметризованное следующим образом:*

$$M : (3t, t^2, 5-t), t \in [0; 2]$$

и заданную 1-форму: $\omega = 2x^2 dx^1 - x^1 x^3 dx^2 + dx^3$.

Вычислим интеграл от этой формы по кривой:

$$\int_M \omega = \int_0^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2t \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_0^2 (2x^2 \cdot 3 - x^1 x^3 \cdot 2t - 1)dt = \int_0^2 (6t^3 - 24t^2 - 1)dt$$

Th 1 (Stockes)**.**

$$\int_{\Omega_{p+1}} d({}^{(p)}\omega) = \int_{\partial\Omega_{p+1}} {}^{(p)}\omega \tag{7}$$

Ex 5. *Рассмотрим 2-многообразие M вложенное в $\mathbb{R}^4$ следующим образом:*

$$M = (u^1, u^1 - u^2, 3 - u^1 + u^1u^2, -3u^2) \tag{8}$$
$$u^1u^1 + u^2 + u^2 < 1 \tag{9}$$

Граница многообразия - кривая, описываемая одним параметром t. Граница параметризуется в $\mathbb{R}^4$ следующим образом:

$$\partial M = (\cos t, \cos t - \sin t, 3 - \cos t + \cos t \sin t, -3\sin t) \tag{10}$$

Рассмотрим форму ω:

$$\omega = x^3x^3dx^1 \tag{11}$$
$$d\omega = -2x^2dx^1 \wedge dx^3 \tag{12}$$

и убедимся в правильности теоремы Стокса. Начнём с вычисления интеграла по многообразию от дифференциала. Вычислим базис в касательном пространстве:

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 + u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ u_1 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$dx^1 \wedge dx^3(t_1, t_2) = det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ u^2 - 1 & u_1 \end{vmatrix} \tag{14}$$

$$\int_M d\omega = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-u_1^2}}^{\sqrt{1+u_1^2}} -2(3 - u_1 + u_1u_2)u_1du_2du_1 = \frac{\pi}{2} \tag{15}$$

С другой стороны, вычислим касательный вектор к кривой ∂M

$$m = \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\sin t - \cos t \\ \sin t + \cos 2t \\ -3cost \end{pmatrix} \tag{16}$$

Тогда вычисляя интеграл от формы по границе многообразия:

$$\int_{\partial M} \omega = \int_0^{2\pi} \omega(m)dt = \int_0^{2\pi} (3 - \cos t + \cos t \sin t)^2(-\sin t)dt = \frac{\pi}{2} \tag{17}$$

Листок - 3

1. Покажите, что определение интеграла (Def 6) не зависит от гладкой замены координат.

2. Покажите зависимость знака интеграла (Def 6) от ориентации.

3. Вычислите интеграл от формы $\omega = x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$ по области $D : u, v \in (-1;1)^2$ на поверхности $x = u + v, y = u - v, z = uv$

4. Вычислите интеграл от формы $\omega = x^3 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4$ на многообразии $(u^2u^3, u^1u^1, 1 - 3u^2 + u^3, u^1u^2), u^1u^1 + u^2u^2 + u^3u^3 < 1$

5. В $\mathbb{R}^4$ рассмотрим поверхность F, определяемую системой уравнений:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2, x_1^2 + x_2^2 > x_3^2 + x_4^2$$

   Найдите границу этой поверхности, покажите что это двумерный тор. Ориентируем F, выбирая в качстве положительной внешнюю нормаль шара. Определить индуцированную ориентацию на границе. Построить касательные плоскости.

6. Вычислить интеграл по границе ∂F от формы:

$$x_3x_4dx_1 \wedge dx_2 - x_2x_4 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + x_2x_3dx_1 \wedge dx_4 + x_1x_4dx_2 \wedge dx_3 - x_1x_3dx_2 \wedge dx_4 + x_1x_2dx_3 \wedge dx_4$$

7. Форма ω называется *замкнутой* если $d\omega = 0$. Покажите что замкнутые $k-$формы образуют векторное пространство Z^k. Форма ω назывсется *точной*, если $\exists \alpha : \omega = d\alpha$. Покажите, что точные формы образуют векторное пространство $B^k \subset Z^k$

8. Пусть дифферциальная форма ω_1 - точная, а ω_2 - замкнутая. Докажите, что $\omega_1 \wedge \omega_2$ - точная.

9. Докажите, что интеграл от замкнутой 1-формы по замкнутому пути равен нулю.

10. Предъявите форму α такую, что $d\alpha = \omega$, где

$$\omega = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy \qquad \partial_x A + \partial_y B + \partial_z C = 0$$

Листочек считается сданным если сдано 7 задач из 10 в срок до 28 ноября 2018

Листок - 4

1. Пользуясь ковариантной формой уравнений Максвелла получить уравнения Максвелла в терминах дифференциальных форм. Выписать формы плотности энергии.

2. Является ли вещественное проективное пространство $\mathbb{RP}^n$ ориентируемым? При каких n?

3. Докажите, что всякое комплексное аналитическое многообразие ориентируемо.

   Напоминание: f называется гомоморфизмом групп $(G_1, *), (G_2, \times)$ если $f(a * b) = f(a) \times f(b)$

   Последовательность гомоморфизмов

   $$\cdots \longrightarrow A_i \xrightarrow{\phi_i} A_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} \ldots$$

   называется полуточной, если $\operatorname{im} \phi_i \subset \ker \phi_{i+1}$ и точной если $\operatorname{im} \phi_i = \ker \phi_{i+1}$ для любого i.

4. Рассмотрим последовательность гомоморфизмов:

   $$\cdots \longrightarrow \Omega_{p-1}(X) \xrightarrow{d} \Omega_p(X) \xrightarrow{d} \Omega_{p+1}(X) \xrightarrow{d} \ldots$$

   Покажите что она всегда полуточна. Приведите пример многообразия для которого эта последовательность точна.

   Факторпространство $H^P(X) := Z^p(X)/B^p(X)$ будем называть пространством когомологий де Рама.

5. Докажите,что $H^n(M) = 0$ если $n > \dim \mathrm{M}$.

6. Доказать, что для любого многообразия X когомологии де Рама $H^0(X) \simeq \mathbb{R}^q$, где q - количество связных компонент X. Как это согласуется с результатами математического анализа?

7. Вычислить когомологии де Рама прямой $\mathbb{R}$

   Область $G \subset \mathbb{R}^n$ будем называть звездной относительно центра $x_0 \in G$, если вместе с каждой точкой $x \in G$ область содержит отрезок $[x_0, x]$

   Th 2 (Пуанкаре)**.** *Любая замкнутая форма $\omega \in \Omega^p(G)$ в звездной области G точна.*

   Назовём отображения $g, f : X \mapsto Y$ гомотопными если существует отображение $F : X \times [0,1] \mapsto Y$, такое что $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$.

   Многообразия X и Y называются гомотопически эквивалентными, если существуют гладкие отображение $f : X \mapsto Y$ и $g : Y \mapsto X$, такие, что их композиции гомотопны тождественным отображениям.

8. Доказать что гомотопическая эквивалентность сохраняет связность.

9. Стянуть (показать гомотопическую эквивалентность точке) $\mathbb{R}^n$
10. Показать что гиперплоскость без точки гомотопически эквивалентна $(n-1)$ мерной сфере.
11. Найдите когомологии плоскости без одной точки, двумерного тора, двумерной сферы. *Замечание:* Здесь и далее под когомологиями понимаются когомологии де Рама
12. Найдите когомологии $\mathbb{RP}^2$.
13. Докажите что отображение
$$\omega \mapsto \int_{S^n} \omega$$
задает изоморфизм $H^n(S^n) \simeq R$.
14. Найдите когомологии S^n.

Пусть компактное многообразие представлено в виде объединения двух открытых подмножеств $M = M_1 \cup M_2$, а $N = M_1 \cap M_2$ - их пересечение. Обозначим $\widetilde{M} = M_1 \sqcup M_2$ - их дизъюнктивное объединение. Естественное отображение $\widetilde{M} \mapsto M$ порождает гомоморфизм:
$$h : \Omega(M) \mapsto \Omega(\widetilde{M}) = \Omega(M_1) \oplus \Omega(M_2)$$
Естественные отображения $M_i \mapsto \widetilde{M}$ порождают ограничения $l : N \mapsto \widetilde{M}$, которые порождают гомоморфизмы:
$$l^i : \Omega(\widetilde{M}) \mapsto \Omega(M_i), l = l^2 - l^1$$

15. Последовательность
$$0 \longrightarrow \Omega(M) \xrightarrow{h} \Omega(M_1) \oplus \Omega(M_2) \xrightarrow{l} \Omega(N) \longrightarrow 0$$
точна.