Для получения оценки 'отлично' за курс необходимо сдать не менее 9 задач из каждого листочка, оценки 'хорошо' - 7 задач, оценки 'удовлетворительно' - 5 задач.

Понятие группы, морфизмы. Группа перестановок

Задача 1.1: Покажите, что любая перестановка представима как произведение перестановок вида $(1, i)$; как произведение перестановок вида $(i, i+1)$.

Определение 1.1. $\mathrm{sign}(\pi) = (-1)^t$, *где* t *- количество транспозиций в разложении* π

Задача 1.2: Покажите независимость определения sign от разложения. Сформулируйте это определение в терминах количества инверсий в перестановке.

Задача 1.3: Докажите, что отображение $\mathrm{sign} : S_n \to \mathbb{Z}_2$ - гомоморфизм

Задача 1.4: Установите следующие изоморфизмы:

$$S_3 \simeq [\text{Группа движений треугольника}]$$
$$S_4 \simeq [\text{Группа вращений куба}]$$
$$S_4 \times S_2 \simeq [Группадвиженийкуба]$$

Задача 1.5: Доказать, что группа из 6 элементов либо абелева, либо изоморфна S_3

Определение 1.2. *Автоморфизмом группы называется изоморфизм* $G \to G$. *Группа автоморфизмов группы* G *обозначается* $\mathrm{Aut}\, G$.

Задача 1.6: Докажите, что $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p) \simeq (\mathbb{Z}_p)$

Задача 1.7: Покажите, что любая бесконечная группа содержит нетривиальную подгруппу.

Задача 1.8: Докажите, что любая группа порядка 8 имеет вид $\{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$.

Задача 1.9: Каких перестановок в S_n больше - чётных или нечётных?

Задача 1.10: Введём на множестве G бинарную операцию / следующим образом:

$$G \times G \to G : (g, h) \mapsto g/h$$

$$\forall f, g, h \in G : (f/h)/(g/h) = f/g$$
$$\forall g, h \in G, \exists x \in G : g/x = h$$

Покажите, что G - группа относительно умножения $gh = g/((h/h)/h)$.