Для получения оценки 'отлично' за курс необходимо сдать не менее 9 задач из каждого листочка, оценки 'хорошо' - 7 задач, оценки 'удовлетворительно' - 5 задач.

Группы SU(2), SO(3)

Задача 3.1: Докажите равенство:

$$e^{xA}Be^{-xA} = \sum \frac{x^k}{x!} \operatorname{ad}_A^k(B),$$

где оператор ad определяется как: $\operatorname{ad}_a(b) = [a, b]$.

Задача 3.2: Покажите, что центр группы $SO(n)$ либо тривиален, либо имеет порядок 2. Какой центр у $SU(n)$?.

Задача 3.3: Введем на $SU(2)$ следующую метрику:

$$ds^2 = \operatorname{Tr}(dg \cdot dg^\dagger)$$

Покажите что эта метрика совпадает со стандартной метрикой на соотвествующей сфере.

Задача 3.4: Покажите, что любой элемент $O \in SO(3)$ имеет собственный вектор с собственным значением 1.

Задача 3.5: Покажите, что алгебра Ли $\mathfrak{so}(3)$ - векторное пространство антисимметричных матриц.

Рассмотрим пространство бесседловых эрмитовых матриц:

$$H = \{h \in \mathbb{C}^{2x2} | \operatorname{Tr}(h) = 0, h = h^\dagger\}$$

Задача 3.6: Покажите, что матрицы Паули(σ_i) - базис H. Покажите, что $\forall U \in SU(2), \forall m \in H :\ U^\dagger m U = n \in H$

Задача 3.7: Пусть $m = m_i\sigma_i \in H$. Докажите, что отображение:

$$\omega : SU(2) \to \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^3)$$

$$U \mapsto \omega(U)$$

такое что $n_i = \omega(U)_{ij}m_j$ задаётся формулой

$$\omega(U)_{ij} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\sigma_i U^\dagger \sigma_j U)$$

Покажите что это гомоморфизм.

Задача 3.8: Покажите, что $\omega(U) \in SO(3)$.

Задача 3.9: Докажите, что $SO(3) \simeq SU(2)/Z_2$